Prof. Dr. Z. Kabluchko
Hauke Seidel

Wintersemester 2017/18
8. Januar 2018

Wahrscheinlichkeitstheorie 2

Übungsblatt 12

Abgabe: 15. Januar 2018 bis 14:15 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Für $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ und eine Indexmenge I sei $X\colon \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}^{d_2}$ eine stetige Abbildung und $(Q_i)_{i\in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{B})$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $(Q_i)_{i\in I}$ ist straff. $\Rightarrow$ $(Q_i^X)_{i\in I}$ ist straff.

(b) $(Q_i^X)_{i\in I}$ ist straff. $\Rightarrow$ $(Q_i)_{i\in I}$ ist straff.

Dabei ist Q_i^X das Bildmaß, das heißt, für Borel-Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^{d_2}$ ist $Q_i^X(B) = Q_i(X^{-1}(B))$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Zeigen Sie: Eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Zufallsgrößen mit Indexmenge I und mit $X_i\colon (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist genau dann gleichgradig integrierbar, wenn die Maßfamilie $(Q_i)_{i\in I}$ straff ist, wobei für $B \in \mathcal{B}$

$$Q_i(B) = \int_B |x| \mathbb{P}^{X_i}(\mathrm{d}x).$$

Bemerkung: Für beliebige Maßfamilien ist Straffheit genauso definiert, wie für Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen: Eine Maßfamilie $(Q_i)_{i\in I}$ auf dem metrischen Raum (S,d) heißt straff, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subseteq S$ existiert, sodass $\sup_{i\in I} Q_i(S \setminus K) \le \varepsilon$

Aufgabe 3 (5 Punkte)
(S,d) sei ein metrischer Raum. Auf der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{M}_1(S)$ auf S sei $\rho_p\colon \mathcal{M}_1(S) \times \mathcal{M}_1(S) \to [0,\infty)$ mit

$$\begin{aligned}\rho_p(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2) &= \inf\{\varepsilon > 0 : \text{für alle } A \in \mathcal{B} \text{ ist } \mathbb{P}_1(A) \le \mathbb{P}_2(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ und } \mathbb{P}_2(A) \le \mathbb{P}_1(A^\varepsilon) + \varepsilon\},\\ A^\varepsilon &: = \{s \in S : \operatorname{dist}(s, A) < \varepsilon\}\end{aligned}$$

die Prochorow-Metrik. Zeigen Sie, dass eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_1(S)$ genau dann schwach gegen einen Grenzwert $\mathbb{P} \in \mathcal{M}_1(S)$ konvergiert, wenn $\rho_p(\mathbb{P}_n, \mathbb{P}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ konvergiert. Damit zeigen Sie, dass schwache Konvergenz von der Prochorow-Metrik induziert wird.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Zeigen Sie die folgende Erweiterung des Portmanteau-Theorems:
Für Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2 \ldots$ auf einem metrischen Raum (S, ρ) sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(a) $\mathbb{P}_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\longrightarrow}} \mathbb{P}$

(b) Für alle messbaren Funktionen $h\colon S \to \mathbb{R}$ mit $\sup_{s\in S} |h(s)| < \infty$, für die $\mathbb{P}(\mathcal{D}_h) = 0$ ist, gilt die Konvergenz
$$\lim_{n\to\infty} \int h \mathrm{d}\mathbb{P}_n = \int h \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Dabei ist $\mathcal{D}_h \subseteq S$ die Menge der Unstetigkeitspunkte von h.
Hinweis: Führen Sie im Beweis der Hinrichtung geschickt Intervalle $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ ein und zeigen Sie, dass die Ränder der Mengen $\{f \in I_k\}$ unter $\mathbb{P}$ Maß 0 haben. Dann wenden Sie die Charakterisierung 5 der schwachen Konvergenz aus dem Portmanteau-Theorem an.